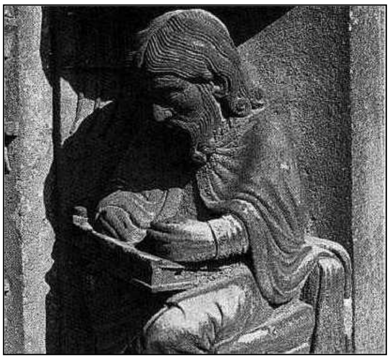
MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES

François Brunault

Il n'est heureusement pas nécessaire d'être bon en mathématiques pour apprécier la musique. Cependant…
"La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie les nombres" (Leibniz, 1712)

L'expérience de Pythagore

Pythagore (env. 569-475 av. J.-C.) déjà, se rendit compte que les nombres entiers permettent d'expliquer l'harmonie des sons. La vie de Pythagore est mal connue. Originaire de l'île de Samos, en mer Égée, il voyagea beaucoup, et l'on pense qu'au cours de ses voyages il apprit les mathématiques babyloniennes et égyptiennes. Les Babyloniens et les Égyptiens étaient déjà bien avancés pour l'époque, mais Pythagore, lui, s'intéressait aux nombres pour eux-mêmes. Il partit s'installer à Crotone, en Italie du Sud (à l'époque sous domination grecque), auprès de Milon, un athlète accompli, douze fois vainqueur aux Jeux olympiques et pythiques. Milon avait le bon goût de s'intéresser aux mathématiques et à la philosophie. Grâce à lui, Pythagore fonda la Fraternité pythagoricienne, un groupe fort de plusieurs centaines de disciples aux pratiques quelque peu obscures. Les membres de la Fraternité pythagoricienne vénéraient le Nombre. Ils s'attachaient à étudier les nombres *entiers* (1, 2, 3, …) ainsi que les rapports de proportion entre ces nombres, c'est-à-dire les nombres *rationnels*, encore appelés fractions (1/2, 1/3, …). Ils pensaient que les nombres seuls permettent de saisir la nature véritable de l'univers. Platon (427-327 av. J-C.) pensait lui que les nombres sont "l'essence même de l'harmonie cosmique et intérieure" (le *platonisme* mathématique consiste à penser que les objets mathématiques ont une existence indépendante du monde sensible).
Venons-en à l'expérience de Pythagore. Selon Jamblique (env. 250-330 ap. J.-C.), auteur d'une *Vie de Pythagore*, ce dernier passa un jour devant l'atelier d'un forgeron et écouta les marteaux battre le fer. Certaines combinaisons de sons étaient harmonieuses, d'autres moins. Il étudia les marteaux et s'aperçut que deux sons étaient harmonieux lorsque les masses des deux marteaux correspondants étaient dans un rapport simple de nombres entiers.
Que cette histoire soit vraie ou simplement une légende, il apparaît acquis que Pythagore a le



Pythagore, cathédrale de Chartres

premier mis en évidence le fait que l'oreille humaine est sensible aux *rapports simples de fréquences* existant entre les sons (la *fréquence* est un nombre qui mesure la hauteur d'un son, voir plus loin). L'expérience de Pythagore peut également être réalisée avec d'autres supports. On peut admirer, par exemple, un beau dispositif au Musée National du Moyen Âge à Paris. Si l'on considère une corde de guitare, on peut réaliser l'expérience de Pythagore en faisant vibrer la totalité de la corde, puis en la pinçant à différents endroits. Si la longueur délimitée par ce pincement est en rapport simple (i.e. 1/2, 1/3, 2/3, ...) avec la longueur totale de la corde, le nouveau son produit (qui est plus haut) sera en harmonie avec le premier.

La constitution de la gamme

Le mot gamme vient de la lettre γ qui se dit gamma. Bien que tout le monde soit familier aujourd'hui avec la fameuse énumération "Do - Ré - Mi - Fa - Sol - La - Si - Do", la gamme possède une longue histoire. Posons-nous la question suivante, apparemment innocente : étant donné que la fréquence d'un son peut varier continûment, pourquoi privilégier certaines notes (Do, Ré,... , Do) par rapport à d'autres ? Et pourquoi y a-t-il sept noms de notes (ou bien douze, si l'on inclut les touches noires du piano) ? L'expérience de Pythagore, décrite plus haut, permet d'apporter un début de réponse à cette question.

Les rapports simples de fréquences ont reçu des noms particuliers. L'intervalle qui correspond à un rapport de fréquences égal à 2 s'appelle une octave. L'octave est extrêmement naturelle : lorsqu'un homme et une femme chantent ensemble la même mélodie, ils le font en général avec un intervalle d'une octave, la plupart du temps sans s'en rendre compte. L'octave est l'intervalle fondamental qui délimite la gamme. C'est l'intervalle qui existe entre le premier et le deuxième Do dans l'énumération "Do - Ré - Mi - Fa - Sol - La - Si - Do". D'après l'expérience de Pythagore, il est maintenant naturel de chercher dans cette octave d'autres rapports simples de fréquences, afin de constituer la gamme. D'un point de vue mathématique, cela revient à chercher des nombres rationnels compris entre 1 et 2. Les intervalles correspondant aux rapports 3/2, 4/3 s'appellent respectivement quinte et quarte. Par exemple, l'octave peut se diviser en une quinte et une quarte. Cela se traduit mathématiquement par l'égalité $2 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$.

L'idée naturelle pour constituer la gamme consiste à écrire une succession d'intervalles ascendants de quintes et de calculer les fréquences associées. Si l'on part d'une note de référence de fréquence $f_0 = 1$, les fréquences successives sont

$$f_1 = \frac{3}{2} \times f_0 = \frac{3}{2}$$

$$f_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times f_0 = \frac{9}{4}$$

$$f_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times f_0 = \frac{27}{8} \qquad \text{etc.}$$

On constate que :

$f_{12} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 129{,}746$ est voisin de $2^7=128$; autrement dit un intervalle de douze quintes est voisin d'un intervalle de sept octaves. On dispose maintenant de douze notes $f_0, f_1, \cdots, f_{11}$. Le problème est que ces notes sortent de l'intervalle fondamental valant une octave $[f_0, 2f_0]$. On peut les ramener dans cet intervalle grâce à des changements d'octave ; cela revient à diviser chacune des fréquences $f_0, f_1, \cdots, f_{11}$ par une puissance de 2 appropriée. Si l'on effectue ce travail, que l'on classe les fréquences obtenues par ordre croissant, on obtient douze notes réparties dans l'intervalle $[f_0, 2f_0]$. On leur donne les noms "Do - Do# - Ré- Ré# - Mi - Fa - Fa# - Sol - Sol# - La - La# - Si". Le symbole # se lit *dièse* ; on dit que la note est *altérée*. Les notes naturelles correspondent aux touches blanches d'un piano, tandis que les notes diésées correspondent aux touches noires. On peut se référer à **[1]** pour une étude mathématique plus poussée. La gamme que nous venons de décrire est appelée la *gamme naturelle (pythagoricienne)*. Il existe plusieurs variantes de cette gamme, comme la gamme de Zarlino, prêtre et musicien italien (1517-1590). Toutes ces variantes respectent le même principe : les rapports entre les différentes fréquences sont des nombres rationnels (les intervalles correspondants sont harmonieux). Ce sont des *gammes naturelles*.

Un des problèmes de la gamme naturelle est que les douze intervalles (appelés *demi-tons*) constituant l'octave sont inégaux. Cela n'est nullement choquant d'un point de vue musical, mais cela rend la transposition difficile (la *transposition* consiste à écrire la gamme en partant d'une note différente du Do, par exemple Ré). La *gamme tempérée* remédie à ce problème. Pour former cette gamme, on décrète que l'octave doit être divisée en douze intervalles égaux, appelés *demi-tons tempérés*. Si l'on note r le rapport de fréquences correspondant à l'un de ces intervalles (peu importe lequel : ils sont égaux), on doit avoir $r^{12} = 2$, ce qui donne $r = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$. En langage savant, on dit que le demi-ton tempéré est la moyenne géométrique des douze demi-tons naturels. Cela permet de mieux comprendre (n'est-ce pas?) le terme "tempéré"… Par exemple, la quinte tempérée, qui se compose de sept demi-tons tempérés, est caractérisée par le rapport $r^7 \approx 1{,}498 \approx \frac{3}{2}$. La quinte tempérée est donc assez voisine, heureusement, de la quinte naturelle. La gamme tempérée fut proposée par Galilée père (env. 1520-1591), musicien professionnel et élève de Zarlino. Étant (légèrement) fausse d'un point de vue musical, elle fut tenue pour monstrueuse à ses débuts. Le *Clavier bien tempéré* de Jean-Sébastien Bach (1685-1750), datant de 1722 et 1744, contribua à la faire accepter. Cette œuvre célèbre comprend deux livres contenant chacun 24 préludes et fugues, écrits dans les 12 tonalités majeures et les 12 tonalités mineures correspondantes. La gamme tempérée fut définitivement adoptée au milieu du XIXe siècle. À l'heure actuelle, nos oreilles sont tout à fait habituées à cette gamme, si bien qu'une tierce majeure naturelle (définie par un rapport de fréquences égal à 5/4) nous semble fausse!

Étude physique du son

Un son est caractérisé par quatre facteurs : sa hauteur, sa durée, son intensité, et son timbre. La hauteur d'un son est mesurée par la *fréquence*, que l'on exprime en Hertz (Hz). La durée s'exprime évidemment en secondes (s). L'intensité est mesurée par le *niveau sonore*, exprimé en décibels (dB). La quantification du timbre est un problème plus délicat que nous n'aborderons que partiellement. Nous allons ici nous intéresser à quelques aspects physiques simples du son.

Le son se propage dans l'air (ou dans d'autres milieux) au moyen d'une onde, appelée *onde acoustique*. Le son trouve son origine dans un brusque changement de pression de l'air, changement qui va se propager au moyen de légères surpressions et dépressions successives. On peut avoir à l'esprit l'image des vaguelettes que l'on forme en tapant à la surface d'un étang. Ces vaguelettes ont plusieurs caractéristiques : la vitesse de propagation v, la longueur d'onde λ (qui est la distance entre deux crêtes successives de la vague), la période T, et l'amplitude h (qui est la différence d'altitude entre une crête et le niveau de l'étang). On a la relation $v = \lambda / T$. Une remarque fondamentale est que la vitesse de propagation v ne dépend que du milieu de propagation (l'étang), et pas des caractéristiques du choc initial. Ainsi, dans l'air et dans des conditions normales, le son se propage à la vitesse $v \approx 340\, m \cdot s^{-1}$. Il ne faut pas confondre cette vitesse avec la vitesse de l'air lui-même (qui est globalement fixe). La fréquence f d'un son est définie par la formule $f = \frac{1}{T}$. Dans cette formule T est exprimée en secondes et f en Hertz. La note la plus basse d'un piano correspond à la fréquence $f = 27{,}5\ Hz$, tandis que pour la note la plus haute on a $f \approx 4186 Hz$. Petit exercice : combien d'octaves un clavier de piano comprend-il ?

L'intensité d'un son est le rapport entre la puissance de l'onde acoustique, exprimée en Watt (W), et la surface sur laquelle on mesure cette puissance. L'intensité s'exprime donc en $W \cdot m^{-2}$. Cela permet de comprendre pourquoi un son s'atténue avec la distance, et même, de calculer précisément cette atténuation. Lorsque l'oreille perçoit des sons d'intensités respectives $I, 2I, 4I$, elle juge que l'écart d'intensité entre les sons I et $2I$ est le même que celui entre $2I$ et $4I$. Autrement dit, en ce qui concerne l'intensité, l'oreille est sensible aux rapports et non aux différences. On dit que l'oreille travaille de manière logarithmique. Cela explique que la grandeur utile soit le *niveau sonore* L, défini par la formule

$$L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est l'intensité du son considéré et $I_0 = 10^{-12}\ W \cdot m^{-2}$ est une intensité de référence correspondant à une limite d'audibilité. Le niveau sonore s'exprime en décibels (dB). Pour donner un ordre de grandeur, un pianissimo (pp) correspond à $30\, dB$ et un fortissimo (ff) correspond à $90\, dB$.

La quantification du timbre d'un son fait intervenir des outils mathématiques plus élaborés, tels que la décomposition d'une fonction en série de Fourier. Pour aborder cette question sans rentrer dans de terribles détails, il est plus commode de faire l'expérience suivante. Jouez une note sur un piano, en appuyant fortement sur la touche (prenez le temps de vous asseoir avant, cela fait plus sérieux). Si vous écoutez attentivement, vous pourrez percevoir des notes plus hautes, issues de la vibration de certaines autres cordes du piano. Ces dernières notes sont appelées les *harmoniques supérieures*, tandis que la note jouée est appelée *harmonique fondamentale*. Les harmoniques supérieures sont définies par des fréquences multiples ($2f, 3f, 4f \ldots$) de la fréquence fondamentale (f). Les cordes du piano correspondant à ces fréquences $2f, 3f, 4f \ldots$ vibrent par sympathie avec la corde initialement excitée. Il existe des modèles physiques simples permettant d'expliquer pourquoi les fréquences des harmoniques supérieures sont des multiples de la fréquence fondamentale. Vous pouvez faire cette expérience avec d'autres instruments comme la guitare. Considérons maintenant un son quelconque. L'onde acoustique correspondante peut être décomposée en somme de différents signaux "purs", correspondant aux différentes harmoniques du son. On peut définir une amplitude relative à chaque harmonique, et la collection de toutes ces amplitudes (appelée *spectre*) détermine le timbre du son. Par exemple, la guitare et le violon sont des instruments dont le son est "riche en harmoniques".

Dans l'étude physique de la plupart des instruments, on commence par étudier le *régime vibratoire* de l'instrument (par exemple, la vibration mécanique de la corde), puis l'on étudie le *rayonnement acoustique* produit (par exemple, la vibration de l'air dans la caisse de résonance du piano). En effet, on peut la plupart du temps négliger l'interaction entre ces deux phénomènes. Pour des instruments tels que les timbales ou le gong, cela n'est plus possible et la modélisation physique est plus complexe. Je renvoie aux chapitres 3 à 6 de **[2]** où de nombreux exemples d'instruments sont étudiés (y compris la voix humaine).

L'acoustique d'une salle est également susceptible d'être modélisée mathématiquement. Un paramètre important pour une salle est le *temps de réverbération*, défini comme étant le temps de chute du niveau sonore de 60 dB. Le temps de réverbération dépend de la fréquence du son joué. Les techniciens du son s'attachent à ajuster le temps de réverbération en jouant sur le revêtement de la salle. Par exemple, certains panneaux poreux sont mis en place de manière à absorber le son. Il existe une formule permettant de déterminer approximativement le temps de réverbération : c'est la formule de Sabine. On peut se reporter au chapitre 7 de **[2]** pour plus de détails. L'acoustique d'une salle dépend naturellement aussi beaucoup de sa géométrie. Saviez-vous qu'au Moyen Âge, les salles pour pestiférés des hôpitaux étaient en forme d'ellipse? En se plaçant au bon endroit, la famille pouvait discuter avec le malade sans risquer la contagion. Cela tient à une propriété géométrique particulière des ellipses. Le même phénomène a lieu dans la plupart des stations de métro parisiennes.

Nous avons observé, par exemple au moyen de l'expérience des harmoniques supérieures du piano, que la nature est sensible aux rapports de fréquence qui sont des nombres entiers. Il est tout à fait remarquable que nous suivons la nature lorsque nous apprécions l'harmonie d'un intervalle musical. ■

Bibliographie

[1] BROUÉ Michel, *Les tonalités musicales vues par un mathématicien*. www.math.jussieu.fr/~broue/tonamath.pdf Publié dans : "Le temps des savoirs", Revue de l'Institut Universitaire de France, **4**, D.Rousseau & M.Morvan eds., Odile Jacob, Paris (2002), pp. 37-78.

[2] ZANANIRI Chérif, *Musique et physique*, Coll. La physique pour tous, Ellipses, Paris (2002).